МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СОФИЗМЫ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

Свищева Е. В.
Харьковский гуманитарный университет «Народная украинская академия»,
Харьков, ул. Лермонтовская, 27, тел.: 716-44-02,
e-mail: esvishchova@gmail.com

Правильно понятая ошибка – это путь к открытию.
И. П. Павлов

Софизм – слово греческого происхождения, в переводе означающее хитроумную уловку, выдумку или головоломку. В Древней Греции развитие искусства ведения дискуссий нередко приводило к изобретению хитроумных "доказательств" неверных утверждений. Поскольку их часто использовали софисты – учителя философии и красноречия в Древней Элладе, то такие мнимые доказательства были названы софизмами. Таким образом, софизм – это правдоподобное рассуждение, приводящее к неправдоподобному результату. Причем полученный результат может противоречить всем нашим представлениям, но найти ошибку в рассуждении зачастую не так-то просто; иной раз она может быть и довольно тонкой и глубокой.

Математические софизмы в основном строятся на неверном словоупотреблении, на неточности формулировок и геометрических построений, на скрытом выполнении запрещённых действий, пренебрежении условиями применимости правил, формул или теорем. Они возникают как в алгебре, так и в геометрии, и могут быть обнаружены, хотя и не часто, даже в разделах высшей математики.

Чем же полезны софизмы для изучения математики? Во-первых, они развивают логическое мышление. Найти ошибку – значит не совершить её в будущем. Во-вторых, рассмотрение софизмов помогает глубже усвоить учебный материал. В-третьих, развивает внимательность, вдумчивость, критическое отношение к изучаемому материалу. И, наконец, это просто захватывающее занятие – найти в рассуждении ошибку, которая приводит к абсурдному выводу.

Сборники математических софизмов были всегда популярными. Многие преподаватели математики в своей работе использовали математические софизмы. В конце 19 — начале 20 веков особенно большой известностью пользовалась книга преподавателя Екатеринбургской гимназии Василия Ивановича Обреимова «Математические софизмы». Этой книжкой зачитывались. Трудно было найти гимназиста, который не читал бы её. В. И. Обреимову удалось собрать и обработать более сорока интересных софизмов. Математические софизмы не случайно явились предметом особого внимания В. И. Обреимова как преподавателя: он считал, что ложные доказательства заставляют учащихся анализировать, дают пищу для вопросов, для товарищеских научных дискуссий.

Целую книгу посвятил ошибкам в геометрических доказательствах Евклид, но до наших дней она не дошла, и нам остаётся лишь гадать о том, какую невосполнимую утрату понесла из-за этого элементарная математика.

В истории развития математики софизмы играли существенную роль. Они способствовали повышению строгости математических рассуждений и содействовали более глубокому уяснению понятий и методов математики.

Софизмы показывают, как тщательно в цепи математических рассуждений должен быть проверен каждый шаг.

В качестве примера рассмотрим утверждение, при "доказательстве" которого используются элементы математического анализа.

Утверждение. Для всех x справедливо равенство $\sin^2 x + \cos^2 x = 0$.

Доказательство.

Найдем $\int \sin x \cos x dx$ двумя способами.

Способ I:

$$\int \sin x \cos dx = \left| \begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{matrix} \right| = -\int t dt = -\frac{t^2}{2} + C = -\frac{\cos^2 x}{2} + C .$$

Способ II:

$$\int \sin x \cos dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{matrix} \right| = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C .$$

Так как вычислялся один и тот же интеграл, то результаты вычислений должны совпадать. Следовательно, $\frac{\sin^2 x}{2} = -\frac{\cos^2 x}{2}$, откуда сразу же следует:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 0$$

Объяснение.

В данном случае ошибочен вывод о равенстве функций $F_1(x) = -\frac{\cos^2 x}{2}$ и $F_2(x) = \frac{\sin^2 x}{2}$, которые являются двумя различными первообразными функции $f(x) = \sin x \cos x$. Как известно, любые две первообразные одной и той же функции отличаются друг от друга на константу, т.е. вместо $F_2(x) = F_1(x)$ выполняется равенство $F_2(x) = F_1(x) + C$, где C – некоторое число. В нашем примере $\frac{\sin^2 x}{2} = -\frac{\cos^2 x}{2} + C$, т.е. $\sin^2 x + \cos^2 x = 2C$, что не противоречит известному тождеству $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

"Доказательство" данного софизма наглядно показывает, что различные способы вычисления интеграла от одной и той же функции могут привести к визуально разным ответам, что не является ошибкой.

Подводя итоги изложенному, можно утверждать, что поиск заключенных в софизме ошибок, ясное понимание их причин ведут к осмысленному постижению математики. Обнаружение и анализ ошибки, заключенной в софизме, зачастую оказываются более поучительными, чем просто разбор решений "безошибочных" задач. Эффектная демонстрация "доказательства" явно неверного результата, в чем и состоит смысл софизма, демонстрация того, к какой нелепице приводит пренебрежение тем или иным математическим правилом, и последующий поиск и разбор ошибки, приведшей к нелепице, позволяют на эмоциональном уровне понять и "закрепить" то или иное математическое правило или утверждение. Такой подход при обучении математике способствует более глубокому ее пониманию и осмыслению.